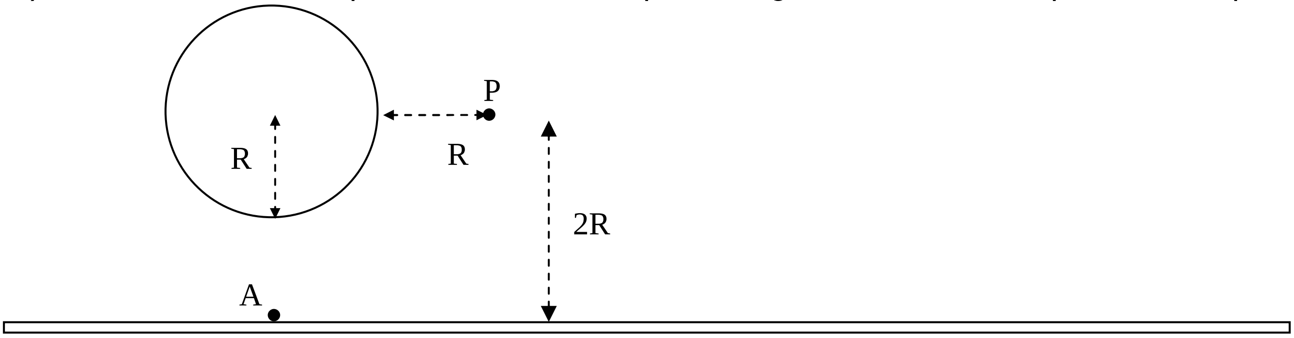
Física Teórica II – Turma C1

1ª Prova – 1º semestre de 2010

1ª QUESTÃO) (2,5)

Uma esfera isolante de raio R é carregada com carga total +Q. Esta esfera é colocada próxima a um plano infinito isolante de densidade superficial de carga - . A esfera se encontra a uma distância de 2R do seu centro ao plano, de acordo com a figura.

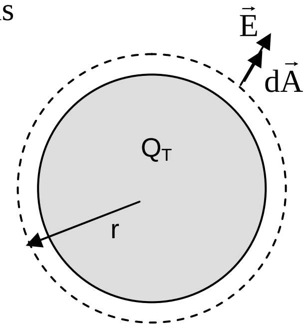
a) Calcule o **VETOR** campo elétrico no ponto P, indicado na figura.
b) Se considerarmos o potencial elétrico no ponto A igual a zero, ache o potencial no ponto P.



GABARITO:

a) Por superposição, o campo elétrico no ponto P é a soma do campo de todas as cargas no problema, isto é, o campo da esfera mais o do plano.

Para a esfera o campo elétrico pode ser calculado usando a lei de Gauss. Se a carga esfera está distribuída homogeneamente, por simetria, o campo elétrico é radial e possui o mesmo módulo a uma mesma distância do centro da esfera. Traçando uma gaussiana esférica concêntrica com a esfera carregada, em todos os pontos dela, o campo elétrico será paralelo ao vetor área e terá o mesmo módulo, assim:



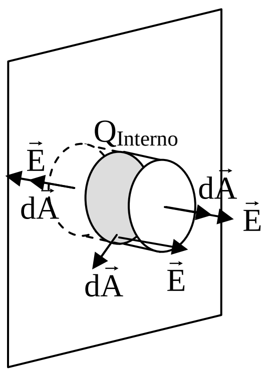
$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \oint E.dA = E\oint dA = E4\pi r^2 = \frac{Q_{Interno}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{Interno}}{r^2}.$$

No ponto P a gaussiana envolve toda a esfera, assim a carga interna é a carga total da esfera e r=2R.

$$E_{Esfera} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{4R^2} = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$

Para o plano também podemos usar a lei de Gauss.

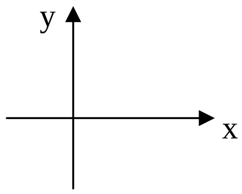
Por simetria o campo elétrico total gerado por uma placa infinita é perpendicular a ela e a uma mesma distância dela, o campo é homogêneo. Traçamos então uma gaussiana para aproveitar esta simetria, por exemplo, um cilindro, como está na figura. O campo elétrico é paralelo ao vetor área nas duas bases do cilindro e perpendicular na lateral. Como o campo é homogêneo nas bases, teremos:



$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \int_{BASES} \vec{E}.d\vec{A} = \int_{BASES} E.dA = 2E\int_{BASE} .dA = 2EA_{BASE} = \frac{Q_{Interno}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q_{Interno}}{2A_{BASE}}.$$

A área da região onde se encontra a carga interna tem a mesma área da base do cilindro, assim, $\sigma = \frac{Q_{Interno}}{A_{BASE}} \Rightarrow E_{Plano} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Definindo o sistema de coordenadas ao lado (isto é arbitrário), o vetor campo elétrico devido à esfera terá o sentido positivo de x, já que a carga é positiva e o do plano negativo de y, já que a densidade de carga é negativa, assim:



$$\vec{E} = E_{Esfera}\hat{i} - E_{Plano}\hat{j} = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\hat{i} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{j}$$

b) O potencial total no ponto P é a soma do potencial da esfera mais o do plano.Como o campo elétrico devido à esfera é radial a ela, as equipotenciais serão esferas concêntricas a ela, isto é, a uma mesma distância do centro da esfera o potencial tem o mesmo valor. Como os pontos A e P tem a mesma distância do centro da esfera $V_P=V_A$, devido a ela. Já devido ao plano $V_P - V_A = -\int_A^P E dy = -\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)2R = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

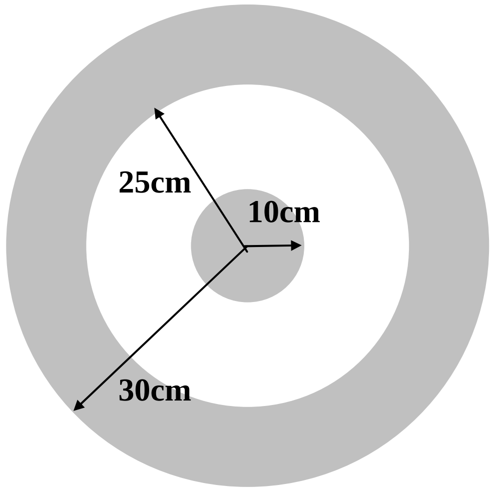
como $V_A=0$, então $V_P = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$. O potencial total será $V_{TP} = V_{P_{Esfera}} + V_{P_{Plano}} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

2ª QUESTÃO) (2,5)

Uma esfera condutora carregada, de raio a=10cm, é colocada no centro de uma casca esférica condutora carregada, de raio interno b=25cm e externo c=30cm, como indicado na figura. Suponha que o campo elétrico num ponto situado a 15cm do centro seja igual a $5{,}0\times10^4$N/C e que tenha a direção radial para dentro, enquanto o campo elétrico num ponto a 50,0 cm do centro, seja de $2{,}0\times10^3$N/C, dirigido radialmente para fora. Calcular:

a) (1.0) A carga, com seu respectivo sinal, sobre a esfera condutora.

b) (1.5) As cargas sobre as faces interna e externa da esfera condutora oca, com seus respectivos sinais.



GABARITO:

a) Usando todo argumento de simetria da primeira questão no cálculo do campo elétrico devido à esfera, sabemos que o campo em qualquer parte do espaço onde traçamos a gaussiana será

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \oint E.dA = E\oint dA = E4\pi r^2 = \frac{Q_{Interno}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{Interno}}{r^2},$$

onde o $Q_{Interno}$ é toda a carga dentro da gaussiana traçada.

Para r=15cm, a gaussiana traçada neste ponto só terá a carga da esfera em seu interior, assim

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{Esfera}}{r^2} \Rightarrow Q_{Esfera} = E4\pi\varepsilon_0 r^2 = 5{,}0.10^4.4\pi.8{,}85.10^{-12}.0{,}15^2 = 1{,}25.10^{-7}\,C.$$

Como o sentido do campo elétrico é para dentro então a carga da esfera é negativa, assim

$$Q_{Esfera} = -1{,}25.10^{-7}\,C.$$

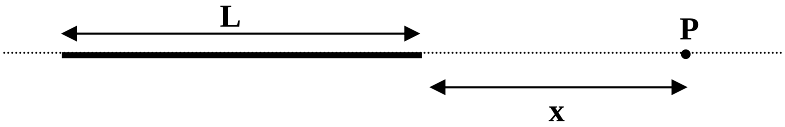
b) Para r=50cm, a carga interna à gaussiana é a soma da carga da esfera mais a da casca, assim, $Q_{Interno}=Q_{Esfera}+Q_{Casca}$. Da mesma forma do item anterior

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{Esfera}+Q_{Casca}}{r^2} \Rightarrow Q_{Esfera}+Q_{Casca} = E4\pi\varepsilon_0 r^2 = 2{,}0.10^3.4\pi.8{,}85.10^{-12}.0{,}5^2 = 5{,}5.10^{-8}\,C,$$ como o campo elétrico temo seu sentido para fora, a carga total é positiva, assim

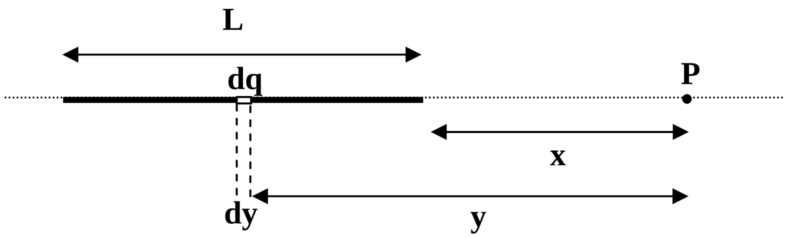
$$Q_{Esfera}+Q_{Casca} = 5{,}5.10^{-8}\,C \Rightarrow Q_{Casca} = 5{,}5.10^{-8} - Q_{Esfera} == 5{,}5.10^{-8} + 1{,}25.10^{-7} = 1{,}8.10^{-7}\,C$$

3ª QUESTÃO) (2,5)

Uma carga positiva Q está distribuída uniformemente ao longo de um bastão isolante de comprimento L.



a) Determine o potencial elétrico num ponto P situado a uma distância x da extremidade direita do fio, tomando como referência V=0 no infinito.
b) Determine o campo elétrico no ponto P.



GABARITO:

a) Cada carga dq que forma a barra, gera em P um potencial igual à $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{y}$, se considerarmos o potencial no infinito igual a zero. Relacionando dq= dy, onde $\lambda = \frac{Q}{L}$, teremos: $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{y} \Rightarrow V(x) = \int dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_x^{x+L}\frac{dy}{y} \Rightarrow V(x) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{x+L}{x}\right)$

c) Tomando o comprimento da barra fixa, o potencial elétrico na direção da barra só depende da variável x, desta forma, a única componente do campo elétrico que não é nula está na direção de x. A relação entre o campo elétrico e o potencial é dada por $E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{x+L}{x}\right)\right] = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{x+L}\right)\left(-\frac{L}{x^2}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{x(x+L)}$

Outra forma de fazer é sabendo que a carga dq gera um campo elétrico no ponto P da forma $dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{y^2}$.

Relacionando dq= dy, onde $\lambda = \frac{Q}{L}$, teremos:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{y^2} \Rightarrow E(x) = \int dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_x^{x+L}\frac{dy}{y^2} \Rightarrow E(x) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+L}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{x(x+L)}$$

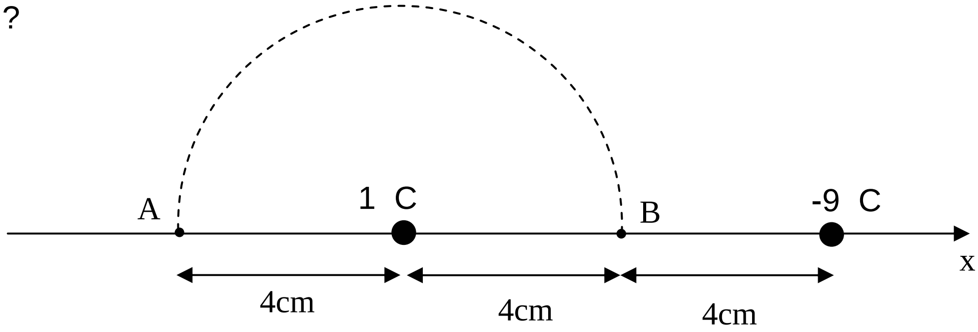
4ª QUESTÃO) (2,5)

Duas cargas, uma com 1 C e outra com 9 C são fixas separadas por uma distância de 8cm, conforme a figura.

a) (1,0) Qual o módulo do campo elétrico nos pontos A e B?

b) (0,8) Qual o valor do potencial nos pontos A e B, considerando o potencial no infinito igual a zero?

c) (0,7) Qual é o trabalho para levar uma terceira carga de módulo 2,0 C de A até B pelo caminho pontilhado (semi-círculo) ?

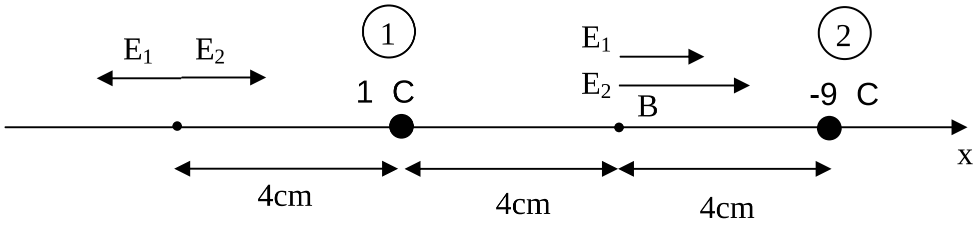


GABARITO:

a) Tanto no ponto A quanto no ponto B a carga da direita gera um campo no sentido positivo de x. A carga da esquerda gera no ponto A um campo no sentido negativo e em B no sentido positivo, assim, chamando a carga da esquerda de 1 e a da direita de 2 teremos, $E_A=E_2-E_1$ e $E_B=E_1+E_2$. Como são duas cargas pontuais

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{{x_2}^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{{x_1}^2} = 8{,}9.10^9.\left(\frac{9.10^{-6}}{0{,}12^2} - \frac{1.10^{-6}}{0{,}04^2}\right) = 0$$

$$E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{{x_2}^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{{x_1}^2} = 8{,}9.10^9.\left(\frac{9.10^{-6}}{0{,}04^2} + \frac{1.10^{-6}}{0{,}04^2}\right) = 5{,}6.10^7\ \frac{N}{C}$$



b) A carga 1 gera um potencial positivo em todo o espaço, se considerarmos o potencial no infinito igual a zero, e a carga 2 gera um potencial negativo, assim tanto em A quanto em B V=V1-V2, assim:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{x_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{x_2} = 8{,}9.10^9.\left(\frac{1.10^{-6}}{0{,}04} - \frac{9.10^{-6}}{0{,}12}\right) = -4{,}45.10^5 V$$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{x_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{x_2} = 8{,}9.10^9.\left(\frac{1.10^{-6}}{0{,}04} - \frac{9.10^{-6}}{0{,}04}\right) = -1{,}78.10^6 V$$

c) O trabalho, neste caso, não depende do caminho, só das condições inicial e final, desta forma:

$$W_{A\text{-}B} = q(V_B - V_A) = 2.10^{-6}.(-17{,}8 + 4{,}45).10^5 = -2{,}67 J$$